CHAPITRE 6

TRIANGLE , CERCLE , ANGLE , AIRE et

RELATIONS METRIQUES

1 Le triangle

Les médiatrices

Au sujet des médiatrices, on connaît déjà les propriétés suivantes:

1. La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.
2. Pour $A \neq B$, d médiatrice de $[A,B] \Leftrightarrow \mathcal{S}_d(A) = B$
3. Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point O, centre du cercle circonscrit au triangle.

Les hauteurs

Exercice 1

On donne $A \notin (BC)$ *et* $p_\perp(A) = A_1 \in (BC)$, $p_\perp(B) = B_1 \in (AC)$ *et* $p_\perp(C) = C_1 \in (AB)$.

- *a) Construire* A_2, B_2, C_2 *avec* $A \in (B_2C_2)$ *et* $(B_2C_2) \parallel (BC)$
  $B \in (A_2C_2)$ *et* $(A_2C_2) \parallel (AC)$
  $C \in (A_2B_2)$ *et* $(A_2B_2) \parallel (AB)$
- *b) Pourquoi a-t-on* ACA_2B *et* $ACBC_2$ *parallélogrammes? En déduire que* B *est milieu de* $[A_2,C_2]$.
- *c) Démontrer que* C *est milieu de* $[A_2,B_2]$ *et* A *milieu de* $[B_2,C_2]$.
- *d) Montrer que* (AA_1), (BB_1) *et* (CC_1) *sont les médiatrices des côtés du triangle* $A_2B_2C_2$, *en déduire que les trois hauteurs du triangle* ABC *sont concourantes.*

Les bissectrices des secteurs

Définition 1 Si $A \notin (BC)$ et $\mathcal{S}_d([A,B)) = [A,C)$ alors d est appelée **bissectrice** du secteur $[BAC]$.

Exercices

2 *Démontrer que tout point de la bissectrice d'un secteur est équidistant des côtés du secteur.*

3 *On donne* $A \notin (BC)$, $M \in \mathbb{P}$, $p_\perp(M) = M_1 \in [A,B)$, $p_\perp(M) = M_2 \in [A,C)$ et $\delta(M,M_1) = \delta(M,M_2)$.

- *a) Démontrer que l'on a* $\delta(M,M_1) = 0 \Leftrightarrow A = M$.
- *b) Si* $M \neq A$, *on appelle* d *la médiatrice de* $[M_1,M_2]$. *Démontrer qu'elle passe par* M *et que l'on a* $\mathcal{S}_d((MM_1)) = (MM_2)$ *et* $\mathcal{S}_d([A,B)) = [A,C)$. *En conclure que* d *est bissectrice du secteur* $[BAC]$.
- *c) En utilisant l'exercice 2, montrer que la bissectrice d'un secteur est l'ensemble des points équidistants des côtés du secteur.*

4 *Si* d_1, d_2, d_3 *sont les bissectrices des trois secteurs d'un triangle,*

- *a) démontrer que* $d_1 \cap d_2 = \{O\}$,
- *b) démontrer à l'aide de l'exercice 3 que* $O \in d_3$.
- *c) Montrer que* O *est le centre du cercle inscrit dans le triangle, tangent aux trois côtés.*

Les médianes

Exercice

Rappel de Théorème. *Le rectangle possède deux axes de symétrie orthogonaux. La médiatrice d'un côté est celle du côté opposé, les côtés opposés ont même longueur, les diagonales sont isométriques et se coupent en leur milieu sur les axes.*

5 *On donne* $d \cap d' = \{D\}$ *et* $p_d([A,B]) = [A',B'] \subset d'$. *Avec* $(AC) \perp (BB')$ *et* $C \in (BB')$, $(A'E) \perp (BB')$ *et* $E \in (BB')$, *si* M *est milieu de* [A,B] *avec* $p_\perp(M) = M_1 \in [A,C]$ *et* M' *est milieu de* [A',B'] *avec* $p_\perp(M') = M_2 \in [A',E]$, *démontrer que*

a) M_1 *est milieu de* [A,C] *et* M_2 *milieu de* [A',E],

b) $\{M,M'\} \subset (M_1 M_2)$ *et* $(M_1 M_2) \parallel d$.

L'exercice 5 permet d'énoncer le théorème suivant.

THEOREME 1 La projection parallèle conserve les milieux des segments.

THEOREME 2 Dans un triangle ABC , si B' est milieu de [A,C] et C' milieu de [A,B] , alors $(B'C') \parallel (BC)$ et $\delta(B',C') = \frac{1}{2}\delta(B,C)$. [B',C'] s'appelle un **segmentmoyen**.

Définition 2 On appelle **médiane** d'un triangle le segment admettant pour extrémités un sommet et le milieu du côté opposé. La droite passant par ces deux points est aussi appelée médiane.

Exercices

Rappel

Si d *est frontière des demi-plans* $\mathbb{P}_1$ *et* $\mathbb{P}_2$ *et* $M \in \mathbb{P}_1$ *et* $N \in \mathbb{P}_2$, *alors* [M,N] *coupe la frontière* d.

6 *Démontrer que deux médianes d'un triangle sont sécantes. (cf. exercice 18 chapitre 4)*

7 *On donne* $A \notin (BC)$, M *milieu de* [B,C], N *milieu de* [B,A] *et* $G \in (AM) \cap (CN)$. *On appelle* K *le milieu de* [G,C] *et* L *celui de* [G,A]. *Démontrer que* LKMN *est un parallélogramme et*

$\delta(N,G) = \delta(G,K) = \delta(K,C)$ *et* $\delta(A,G) = \frac{2}{3}\delta(A,M)$.

Pourquoi la médiane relative au côté $[A,C]$ *passe-t-elle aussi par* G ?

Ces exercices permettent d'énoncer les deux théorèmes suivants.

THEOREME 3 La bissectrice d'un secteur est l'ensemble des points équidistants des côtés du secteur.

THEOREME 4 Dans un triangle,

1. les médiatrices se coupent en un point O centre du cercle circonscrit au triangle,
2. les hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre** du triangle,
3. les bissectrices des secteurs se coupent en un point O' centre du cercle inscrit dans le triangle,
4. les médianes se coupent en un point G, appelé **centre de gravité** ou **barycentre** du triangle, situé aux deux tiers de leur longueur à partir de chaque sommet.

2 Le cercle

Exercices

8 *Un cercle peut-il être un singleton? Un disque peut-il être inclus dans un cercle? Un cercle inclus dans un disque a-t-il le même centre que le disque? Le même diamètre?*

9 *Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle inscrit est le centre du cercle circonscrit. Pour un triangle, ces deux centres ne coïncident que si le triangle est équilatéral.*

10 Construire (règle et compas) la tangente en un point A *d'un cercle dont on ignore le centre.*

11 Construire les tangentes communes à deux cercles non sécants. (si nécessaire, voir exercice 39)

3 L'angle et sa mesure

Les mesures servent à comparer des figures par l'intermédiaire des nombres. La longueur des segments est donnée par l'axiome de la distance qui, à chaque couple de points, associe un nombre de $\mathbb{R}_+$. La mesure des angles est utilisée pour construire des triangles, des figures avec des nombres fournis par le rapporteur.

<u>Les secteurs</u>

Définition 3 On appelle **secteur** l'un des cinq ensembles suivants.

Si $A \notin (BC)$ et $\overline{\mathbb{P}_1} - (AB) = \mathbf{P}_1$ et $C \in \mathbf{P}_1$ et $\overline{\mathbb{P}_2} - (AC) = \mathbf{P}_2$ et $B \in \mathbf{P}_2$

a) L'intersection des deux demi-plans fermés à frontières sécantes, nommée **secteur saillant**.
Notation: $\overline{\mathbb{P}_1} \cap \overline{\mathbb{P}_2} = [BAC]^s$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

b) La réunion des complémentaires dans $\mathbf{P}$ des deux demi-plans ouverts à frontières sécantes, nommée **secteur rentrant**.
Notation: $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cup (\mathbb{P} - \mathbf{P}_2) = [BAC]^r$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières.

c) Une demi-droite $[A,B)$, nommée **secteur nul**, avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,B)$ pour frontières.

d) Un demi-plan fermé sur la frontière duquel on a distingué un point, nommé **secteur plat**.
Notation: Si $A \in [B,C]$, $\overline{\mathbb{P}_1}_A$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,C)$ pour frontières, ou $\overline{\mathbb{P}_1}_A = [BAC]^p$.

e) Le plan dans lequel on a distingué une demi-droite, nommé **secteur tour**.

Notation: $\mathbf{P}_{[A,B)}$ avec A pour sommet et $[A,B)$, $[A,B)$ pour frontières, ou $\mathbb{P}_{[A,B)} = [BAC]^t$ et $C \in\,]A,B)$.

Remarques

1 Pour le secteur $[BAC]$, les frontières (AB) et (AC) de $\overline{\mathbb{P}_1}$ et $\overline{\mathbb{P}_2}$ sont dites supports des frontières $[A,B)$ et $[A,C)$ du secteur.

2 $[BAC]^s = \overline{\mathbb{P}_1} \cap \overline{\mathbb{P}_2} = \overline{\mathbb{P}_2} \cap \overline{\mathbb{P}_1} = [CAB]^s$

3 S'il n'y a pas de confusion, on écrira $[BAC]$ au lieu de $[BAC]^s$ ou $[BAC]^r$.

4 Si $\overline{\mathbb{P}_1} - (AB) = \mathbf{P}_1$, $\overline{\mathbb{P}_1}_{A} \neq \overline{\mathbb{P}_1}_{B}$. Pour plus de rigueur, on pourrait poser comme définition $\overline{\mathbb{P}_1}_{A} = (\overline{\mathbb{P}_1} \ ; [A,B))$. De plus, si l'on ne donne que les frontières, il faut préciser, avec $\mathbb{P}_3 = \mathbf{P} - \overline{\mathbb{P}_1}$, lequel des deux secteurs plats $\overline{\mathbb{P}_1}_{A}$ ou $\overline{\mathbb{P}_3}_{A}$ on utilise, avec le même sommet A et les mêmes frontières $[A,B)$ et $[A,C)$.

5 $\mathbb{P}_{[A,B)} \neq \mathbf{P}_{[B,A)}$

Exercice 12

Si $A \notin (BC)$, *dessiner* $[BAC]^s$, $[CAB]^r$, $\mathbb{P}_{[A,C)}$, $[BCA]^s$, $[BCA]^r$.

Définition 4 Deux secteurs de même sommet sont **adjacents** si et seulement si ils ont en commun exclusivement une ou deux frontières.

Exercices

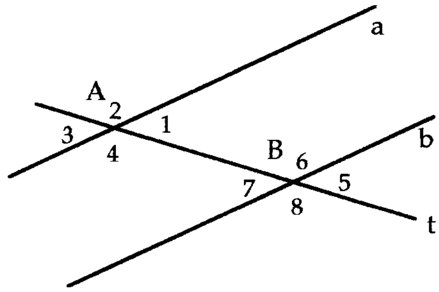
13 *Si* $\mathcal{S}_d(A) = A$ *et* $\mathcal{S}_d(B) = C$ *et* $B \neq C$ *et* $E \in d - \{A\}$ *alors* $[BAE]^s$ *et* $[CAE]^s$ *sont adjacents. A-t-on* $[BAE]^r$ *et* $[CAE]^s$ *adjacents? Et* $[BAE]^r$ *et* $[CAE]^r$?

14 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $\delta(A,B) = \delta(B,C) = \delta(C,A)$ *et* $p_\perp(B) = H \in [A,C]$, *citer les secteurs isométriques.*

15 *Si* ABCD *est un rectangle de centre* O *et* $p_\perp(O) = E \in (AB)$, *citer les secteurs isométriques.*

16 *Deux secteurs saillants* ***opposés par le sommet****, c'est-à-dire dont les frontières sont deux à deux opposées, sont isométriques.*

17 *Soit* $a \neq b$, $t \cap a = \{A\}$, $t \cap b = \{B\}$ *et les 8 secteurs illustrés par la figure ci-contre.*



Les secteurs 1 *et* 7 *respectivement* 4 *et* 6 *sont appelés* ***alternes-internes.***

Les secteurs 2 *et* 8 *respectivement* 3 *et* 5 *sont appelés* ***alternes-externes.***

Les secteurs 1 et 5 respectivement 2 et 6 , 3 et 7, 4 et 8 sont appelés ***correspondants.***

a) Donner une définition des secteurs alternes-internes en utilisant les symboles du cours.

b) Si $a \parallel b$ *, deux des huit secteurs sont isométriques s'ils sont alternes-internes ou alternes-externes ou correspondants .*

c) Réciproquement, si deux secteurs alternes-internes ou alternes-externes ou correspondants sont isométriques, les droites a *et* b *sont parallèles.*

<u>Les angles</u>

THEOREME 5 La relation $\mathcal{R}$, définie dans l'ensemble des secteurs par [ABC] $\mathcal{R}$ [A'B'C'] si et seulement si par une isométrie f, f ([ABC]) = [A'B'C'] , est une relation d'équivalence.

Définition 5 On appelle **angle** une classe d'équivalence selon la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble des secteurs.

Notation: [BAC] $\in \measuredangle BAC$ ou $\measuredangle BAC = \measuredangle \alpha$

Remarques

1 Si l'on doit distinguer $[BAC]^s \in \measuredangle BAC$ et $[BAC]^r \in \measuredangle BAC$, on dira l'angle saillant $\measuredangle BAC$ respectivement l'angle rentrant $\measuredangle BAC$.

2 La classe { [A,B) , [C,D) , ... } = $\measuredangle \omega$ s'appelle **angle nul.**

3 La classe { $\mathbb{P}_{1\ A}$, $\mathbb{P}_{2\ D}$, $\mathbb{P}_{1\ B}$, ... } = $\measuredangle p$ s'appelle **angle plat.**

4 La classe { $\mathbf{P}_{[A,B)}$, $\mathbf{P}_{[C,D)}$, ... } = $\measuredangle t$ s'appelle **angle tour.**

5 Si $(AB) \perp (AC)$

la classe du secteur saillant $[BAC]^s$ s'appelle **angle droit saillant** et se note $\measuredangle d$ et

la classe du secteur rentrant $[BAC]^r$ s'appelle **angle droit rentrant** et se note $\measuredangle d'$.

AXIOME DE LA MESURE DES ANGLES (pour l'usage du rapporteur)

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles.

On admet que l'on dispose d'une application $\mu \; : \; \mathcal{A} \to [\,0, 360\,]$

$$\measuredangle \alpha \mapsto \mu(\measuredangle \alpha) = x$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\quad \mu(\measuredangle \alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \measuredangle \alpha = \measuredangle \omega$

2 $\quad \mu(\measuredangle p) = 180$

3 $\quad \mu(\measuredangle AOB) = \mu(\measuredangle AOC) + \mu(\measuredangle COB) \;\Leftrightarrow\;$ **[AOC] et [COB] sont adjacents**

4 $\quad \mu$ **est bijective.**

Remarques

1 μ est une application. La mesure $\mu(\measuredangle \alpha)$ d'un angle $\measuredangle \alpha$ définie ci-dessus est un nombre réel x. Cette mesure est dite mesure en degré. Notation: $x°$.

2 A quelles parties du rapporteur correspondent les propriétés 1 et 2 ? Quelles sont les propriétés de la distance analogues aux propriétés 3 et 4 ?

Exercices

18 *Montrer que* $\mu(\measuredangle d) = 90°$, $\mu(\measuredangle t) = 360°$, $\mu(\measuredangle d') = 270°$

19 *Si l'on pose* $\mu_r(\measuredangle \alpha) = \frac{\pi}{180} \cdot \mu(\measuredangle \alpha)$, *alors on a une application de* $\mathcal{A}$ *vers* $[0, 2\pi]$ *satisfaisant aux quatre propriétés de la mesure des angles. Cette mesure de l'angle est dite mesure en* ***radian***.

20 *Compléter:*

$\mu(\measuredangle \alpha)$	90	60	120	135	270						
$\mu_r(\measuredangle \alpha)$						$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	1

21 ***Théorème.*** *La somme des mesures des angles d'un triangle est* $180°$. *La somme des mesures des angles d'un parallélogramme est* $360°$.

22 *Si* $(AB) \perp (BC)$ *et* $\delta(A,B) = \delta(B,C)$, *alors* $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB$ et $\mu_r(\measuredangle CAB) = \frac{\pi}{4}$.

Si $p_{\perp}(B) = H \in (AC)$, *alors* $\mu_r(\measuredangle ABH) = \frac{\pi}{4}$ *et* ABH *est un triangle isocèle.*

23 *Dans un parallélogramme* ABCD, $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$ *et* $\mu(\measuredangle ACB) = \mu(\measuredangle CAD)$.

4 Mesure des aires et relations métriques dans le triangle

On dira qu'une figure est **triangulable** si elle est soit la réunion, soit l'intersection d'un nombre fini de triangles.

Exercice 24

Dessiner les ensembles suivants et dire pourquoi ce sont des figures triangulables.

$\mathcal{F}_1 = \Delta ABC \cup \Delta ABD$ *(plusieurs cas de figure)*

$\mathcal{F}_2 = \Delta ABC \cap \Delta ADE$ *avec* D *milieu de* [B,C]

$\mathcal{F}_3 =$ ABCD si ABCD *est un rectangle*

$\mathcal{F}_4 = [A,B]$

$\mathcal{F}_5 = \{A\}$

$\mathcal{F}_6 = \emptyset$

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des figures triangulables.

Pour choisir une mesure sur $\mathcal{T}$, on utilise les propriétés analogues à celles retenues pour la distance et la mesure des angles. On admet alors l'axiome suivant.

AXIOME DE LA MESURE DES AIRES

On admet que l'on dispose d'une application $\sigma : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$
$\mathcal{F} \mapsto \sigma(\mathcal{F}) = x$

avec
1. $\sigma(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F} = \varnothing$ **ou** $\mathcal{F} = [A,B]$
2. **ABCD rectangle** $\Rightarrow \sigma(ABCD) = \delta(A,B) \cdot \delta(B,C)$
3. $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_1) + \sigma(\mathcal{F}_2) - \sigma(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$
4. $\mathcal{F}_1$ **et** $\mathcal{F}_2$ **isométriques** $\Rightarrow \sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$

Le nombre $\sigma(\mathcal{F})$ s'appelle **aire** de la figure $\mathcal{F}$.

Exercices

25 *Montrer que, quel que soit le nombre* $x \in \mathbb{R}_+$, *on a toujours une figure dont l'aire est* x. *Qu'est-ce que* $\sigma([A,B[)$, $\sigma(\{A\})$, $\sigma(\{A,B\})$, $\sigma([A,B))$, $\sigma(\overline{\mathbb{P}_1})$, $\sigma(\{A,B,C\})$?

26 *Dans quels anciens axiomes retrouve-t-on la propriété 2, la propriété 4 ? Quel est, dans l'axiome de la mesure des angles, l'analogue de la propriété 1, de la propriété 3 ? La mesure des aires est-elle bijective?*

27 *Pour un carré* ABCD *avec* $\delta(A,B) = a$, *montrer que* $\sigma(ABCD) = a^2$.

28 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $p_\perp(C) = C' \in (AB)$, *calculer* $\sigma(\Delta ABC)$ *en fonction de* $\delta(C,C')$ *et* $\delta(A,B)$. *(Distinguer les cas* $C' \in [A,B]$ *et* $C' \notin [A,B]$ *)*

29 *Si* $A \notin (BC)$, $(AB) \parallel (CD)$, $p_\perp(C) = C' \in (AB)$, $\delta(A,B) = a$ *et* $\delta(C,C') = h$, *calculer* $\sigma(\Delta ABC)$ *et* $\sigma(\Delta ABD)$ *en fonction de* a *et* h. *En déduire qu'il existe deux figures non isométriques de même aire.*

30 ***Théorème de Pythagore.*** *Soit* ABCD *un carré avec* $\delta(A,B) = a + b$, $A' \in]A,B[$, $B' \in]B,C[$, $C' \in]C,D[$, $D' \in]D,A[$ *et* $\delta(A,A') = \delta(B,B') = \delta(C,C') = \delta(D,D') = a$.

a) *Démontrer que* $\Delta AA'D'$, $\Delta BB'A'$, $\Delta CC'B'$ *et* $\Delta DD'C'$ *sont isométriques et que* A'B'C'D' *est un carré.*

b) *Démontrer que* $\sigma(ABCD) = \sigma(A'B'C'D') + 4\sigma(\Delta AA'D')$.

c) *Avec* $\delta(A',D') = c$, *montrer que* $c^2 = a^2 + b^2$.

31 ***Réciproque du théorème de Pythagore.*** *On donne* $A \notin (BC)$, $\delta(B,C) = a$, $\delta(C,A) = b$, $\delta(A,B) = c$, $c^2 = a^2 + b^2$ *et* $p_\perp(A) = H \in (BC)$. *Avec le théorème direct de Pythagore pour* ΔAHC *et* ΔBHA, *établir que* $\delta(H,C) = 0$.

32 *Le triangle dont les côtés ont respectivement pour longueur* $\sqrt{5}$, 3 *et* $\sqrt{14}$ *est-il rectangle?*

33 *Montrer que si, dans l'égalité* $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, *on pose* $2n + 1 = m^2$, *on peut obtenir une relation permettant de déterminer des nombres entiers satisfaisant à la relation de Pythagore.*

34 ***Théorème.*** *On donne* $(AB) \perp (AC)$, $p_{\perp}(A) = H \in (BC)$, $\delta(B,C) = a$, $\delta(C,A) = b$, $\delta(A,B) = c$, $\delta(B,H) = x$, $\delta(H,C) = y$, $\delta(A,H) = h$, $a = x + y$.

a) Ecrire les relations de Pythagore pour ΔABC , ΔABH , ΔACH.

b) Démontrer que $h^2 = xy$ *et* $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.

c) Démontrer que $c^2 = x^2 + xy$ *et* $\frac{x}{c} = \frac{c}{a}$.

d) Envisager des réciproques pour b) et c).

En résumé, les théorèmes traités dans les exercices 30, 31 et 34 s'énoncent comme suit.

THEOREME 6 **Théorème de Pythagore**

Si $A \notin (BC)$, alors $(AB) \perp (BC) \Leftrightarrow \delta(A,B)^2 + \delta(B,C)^2 = \delta(A,C)^2$

THEOEREME 7 Dans un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse est la moyenne géométrique des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Réciproquement: si l'une des hauteurs d'un triangle est moyenne géométrique des segments qu'elle détermine sur le côté correspondant, le triangle est rectangle.

THEOREME 8 Dans un triangle rectangle, chaque cathète est moyenne géométrique entre son projeté orthogonal sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

Réciproquement, si l'un des côtés d'un secteur aigu d'un triangle est moyenne géométrique entre son projeté orthogonal sur le second côté de ce secteur et ce second côté, le triangle est rectangle.

5 Exercices complémentaires

Paragraphe 1

35 **Théorème** *Dans le triangle isocèle, il existe un côté dont la médiatrice est aussi médiane, hauteur et bissectrice. Réciproquement, si dans un triangle deux des quatre droites précitées sont égales, le triangle est isocèle.*

Paragraphe 2

36 *En utilisant l'exercice 11, par l'origine d'une demi-droite* [A,B), *construire, sans prolonger la demi-droite, une droite orthogonale à la droite* (AB).

37 *On donne* $A \neq B$, $\mathcal{C}_{(A,\delta(A,B))} \cap (AB) = \{B,C\}$ *et* $\mathcal{C}_{(C,\delta(B,C))} \cap \mathcal{C}_{(B,\delta(B,C))} = \{E,F\}$. *Démontrer que* $A \in (EF)$ *et que* $(AB) \perp (EF)$. *En déduire une construction d'une droite orthogonale à* (AB) *passant par* A.

38 *Si* $(AB) \perp (BC)$, *construire (règle et compas) un cercle passant par* A, B *et* C. *Si* ABCD *est un rectangle, construire un cercle passant par les sommets de ce rectangle.*

Rappel

Une droite d *est tangente à un cercle* $\mathcal{C}_{(O,r)}$ *en un point* M *si et seulement si* $d \perp (OM)$ et $M \in d$.

39 a) *Si* $\delta(O,P) > r$, M *milieu de* [O,P] *et* $A \in \mathcal{C}_{(O,r)} \cap \mathcal{C}_{(M,\delta(O,M))}$, *montrer que* (AP) *est une tangente au cercle* $\mathcal{C}_{(O,r)}$.

b) *Si* $r_1 > r_2$ *et* $\delta(O_1,O_2) > r_1 + r_2$, *construire les tangentes à* $\mathcal{C}_{(O_1,r_1 - r_2)}$ *passant par* O_2.
A l'aide de rectangles, construire des tangentes communes aux deux cercles.

c) *Si* $r_1 > r_2$ *et* $\delta(O_1,O_2) > r_1 + r_2$, *construire les tangentes au* $\mathcal{C}_{(O_1,r_1 + r_2)}$ *passant par* O_2.
A l'aide de rectangles, construire des tangentes communes aux deux cercles.

d) *Si* $r_1 > r_2$, *trouver une construction d'une tangente commune à* $\mathcal{C}_{(O_1,r_1)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O_2,r_2)}$ *dans le cas* $r_1 - r_2 < \delta(O_1,O_2) < r_1 + r_2$.

40 *Si* O *est milieu de* [A,B], $C \notin (AB)$ *et* $\mathcal{S}_{(AB)}(C) = C'$, *démontrer que l'on a*

a) $C' \in \mathcal{C}_{(O,\delta(O,B))} \Leftrightarrow C \in \mathcal{C}_{(O,\delta(O,B))}$

b) *Pour* $C \in \mathcal{C}_{(O,\delta(O,B))}$ *on a* $(CA) \perp (C'A) \Leftrightarrow O \in (CC')$

41 *Si* $O \in d$, *démontrer*

a) $\mathcal{S}_d(\mathcal{C}_{(O,r)}) = \mathcal{C}_{(O,r)}$ *et* $\mathcal{S}_O(\mathcal{C}_{(O,r)}) = \mathcal{C}_{(O,r)}$

b) $\mathcal{S}_b(\mathcal{C}_{(O,r)}) = \mathcal{C}_{(\mathcal{S}_b(O),r)}$ *et* $\mathcal{S}_A(\mathcal{C}_{(O,r)}) = \mathcal{C}_{(\mathcal{S}_A(O),r)}$

42 *Démontrer que tout* ***trapèze*** *(quadrilatère ayant deux côtés parallèles) inscrit dans un cercle est isocèle.*

43 *Si* $\delta(O,A) > r$, *démontrer que le point du cercle* $\mathcal{C}_{(O,r)}$ *le plus proche de* A *est sur le diamètre* (OA).

44 *Si* $(AB) \perp (AC)$ *et* $\mathcal{C}_{(O,r)}$ *est le cercle inscrit dans le triangle* ABC *avec* $(AB) \cap \mathcal{C}_{(O,r)} = \{D\}$ *et* $(AC) \cap \mathcal{C}_{(O,r)} = \{E\}$, *démontrer que* A,D,O,E *sont sur un même cercle.*

45 *On donne un losange (parallélogramme dont les diagonales sont orthogonales)* O_1BO_2B' *et* $B \in d$ *et* $d \parallel (O_1O_2)$.

a) *Démontrer que* d *coupe* $\mathcal{C}_{(O_1,\delta(O_1,B))}$ *en un deuxième point* A *et* $\mathcal{C}_{(O_2,\delta(O_1,B))}$ *en un deuxième point* C.

b) *Démontrer qu'il existe une symétrie centrale transformant le secteur* $[CBO_2]$ *dans le secteur* $[BO_2O_1]$ *et que les triangles* ΔBO_2C *et* ΔBO_1O_2 *sont isométriques.*

c) *Démontrer que* C, B', O_2 *sont alignés et* $\delta(A,C) = 2\,\delta(O_1,O_2)$

Paragraphe 3

46 *Démontrer que l'on a* [BAC] *et* [B'A'C'] *adjacents*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [A,B) = [A',B') \text{ ou } [A,B) = [A',C') \text{ ou } [A,C) = [A',C') \text{ ou } [A,C) = [A',B') \\ \text{et} \\ \big([BAC]-([A,B)\cup[A,C))\big)\cap\big([B'A'C']-([A',B')\cup[A',C'))\big)=\varnothing \end{cases}$$

47 $\mathbb{P}_{[A,B)}$ *et* [A,B) *sont adjacents;* $\overline{\mathbb{P}_1} - (AB) = \mathbf{P}_1 \Rightarrow (\overline{\mathbb{P}_1}_A$ et [A,B) adjacents).

48 $\overline{\mathbb{P}_1} - (AB) = \mathbf{P}_1$ *et* $\overline{\mathbb{P}_2} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_1 \Rightarrow (\overline{\mathbb{P}_1}_A$ et $\overline{\mathbb{P}_2}_A$ adjacents);

$\overline{\mathbb{P}_1}_A$ *et* $\overline{\mathbb{P}_2}_B$ *ne sont pas adjacents.*

49 $\overline{\mathbb{P}_1}_A$ *et* $\overline{\mathbb{P}_1}_A$ *ne sont pas adjacents.*

50 *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un secteur soit adjacent à lui-même.*

51 *Dans un parallélogramme* ABCD *de centre* O, *citer des secteurs adjacents.*

52 *Si* $A \preceq B \preceq C \preceq D$ *et* $E \notin (BC)$, *alors* $[AEC]^s$ *et* $[DEB]^s$ *ne sont pas adjacents.*

53 *La bissectrice d'un secteur donne deux secteurs appartenant au même angle.*

54 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $p_\perp(C) = H \in (AB)$ *et* $\delta(C,A) = \delta(C,B)$, *alors* $\mu(\measuredangle CAB) = \mu(\measuredangle CBA)$ *et* $\measuredangle ACH = \measuredangle BCH$ *et* (CH) *est bissectrice de* [ACB].

55 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB$, *alors le triangle est isocèle en* B.

56 *Reformuler les cas d'isométrie des triangles à l'aide de la mesure des angles.*

57 *Tout triangle a au plus un secteur dont la mesure de l'angle est supérieure à* 90°.

58 *Deux secteurs adjacents non nuls sont dits* ***supplémentaires*** *si la somme des mesures de leurs angles est* 180°. *Chaque secteur est alors le* ***supplément*** *de l'autre.*

a) *Deux secteurs supplémentaires ne peuvent pas être rentrants.*

b) *Deux secteurs qui ont même supplément sont isométriques.*

c) *Deux secteurs saillants, dont les supports des frontières respectives sont deux à deux parallèles, sont isométriques ou l'un est le supplément d'un secteur isométrique à l'autre.*

d) *Deux secteurs saillants, dont les supports des frontières respectives sont deux à deux orthogonales,sont isométriques ou l'un est le supplément d'un secteur isométrique à l'autre.*

59 *Si un secteur saillant* [ASB] *et un secteur droit* [BSC] *sont adjacents, montrer que l'angle du secteur saillant dont les frontières sont les bissectrices des secteurs* [ASB] *et* [ASC] *mesure* 45°.

60 *Deux secteurs adjacents non nuls sont dits* ***complémentaires*** *si la somme des mesures de leurs angles est* 90°. *Chaque secteur est alors le* ***complément*** *de l'autre.*

Deux secteurs qui ont le même complément sont isométriques.

61 a) *L'intersection de deux bandes à frontières sécantes est un losange si et seulement si les bandes ont même largeur.*

b) *Les diagonales du losange sont orthogonales. Dans quel cas un quadrilatère convexe à diagonales orthogonales est-il un losange?*

c) *Un losange peut-il avoir quatre axes de symétrie?*

d) *Citer des angles égaux dans un losange* ABCD *de centre* O.

Arcs et angles

Définition *On appelle* ***arc*** *(de cercle) l'intersection d'un secteur et d'un cercle dont le centre est le sommet du secteur.*

Notation: $\mathcal{C}_{(O,r)} \cap [AOB] = \widehat{AB}$ et $\mathcal{C}_{(O,r)} \cap \mathbf{P}_{[O,A)} = \mathcal{C}_{(O,r)}$

62 *Un arc peut-il être un cercle, un singleton, une paire de points? Avec un même secteur, peut-on avoir plusieurs arcs?*

63 *Définir les "arcs adjacents" et la mesure d'un arc. Deux arcs non isométriques peuvent-ils avoir la même mesure?*

64 *On donne* $\{A, B, C\} \subset \mathcal{C}_{(O,r)}$ *et* $A \notin (BC)$. *Démontrer que* $\mu(\widehat{BC}) = 2\ \mu(\measuredangle BAC)$ *dans les cas suivants.*

a) $O \in (AC)$ *. Montrer que* ΔBOA *est isocèle et que* $\mu(\measuredangle BOC) = \mu(\measuredangle BAO) + \mu(\measuredangle OBA)$.

b) $O \in [BAC] - ([A,B) \cup [A,C))$ *. Construire* (OA) *et utiliser deux fois le résultat a).*

c) $O \notin [BAC]$*. Considérer* $\measuredangle BAO$ *et* $\measuredangle CAO$.

65 *On donne* $\{B, B', C, C'\} \subset \mathcal{C}_{(O,r)}$ *avec* $B \prec A \prec B'$ *et* $C \prec A \prec C'$ *. Démontrer que* $\mu(\measuredangle BAC) = \mu(\measuredangle B'CC') + \mu(\measuredangle BB'C)$ *. En déduire que* $\mu(\measuredangle BAC) = \frac{1}{2}(\mu(\widehat{B'C'}) + \mu(\widehat{BC}))$.

66 *On donne* $\{B, B', C, C'\} \subset \mathcal{C}_{(O,r)}$ *avec* $A \prec B \prec B'$ *et* $A \prec C \prec C'$*. Démontrer que* $\mu(\measuredangle BAC) = \mu(\measuredangle B'CC') - \mu(\measuredangle BB'C)$ *. En déduire que* $\mu(\measuredangle BAC) = \frac{1}{2}(\mu(\widehat{B'C'}) - \mu(\widehat{BC}))$.

67 *Etablir une relation entre la mesure d'un arc* $\widehat{AB} = \mathcal{C}_{(O,r)} \cap [AOB]$ *et celle de l'angle* $\measuredangle BAC$ *où* (AC) *est tangente au cercle.*

68 *Deux droites sécantes déterminent plusieurs secteurs appartenant à différents angles. On appelle* ***angle de deux droites*** *sécantes celui dont la mesure est la plus petite.*

a) Si les hauteurs d'un triangle ABC *se coupent en* H*, calculer* $\mu(\measuredangle BHC)$ *en fonction de* $\mu(\measuredangle CAB)$.

b) *Si* $A \notin (BC)$ *,* $p_\perp(B) = H \in (AC)$ *,* (CG) *bissectrice de* $[ACB]$ *,* (BG) *bissectrice de* $[ABC]$ *,* $\mu(\measuredangle CAB) = 30°$ *et* $\mu(\measuredangle ABC) = 100°$ *, calculer la mesure des angles des deux bissectrices, d'une bissectrice et de la hauteur* (BH).

Paragraphe 4

69 *On donne* $A \preceq B \preceq C \preceq D$ *avec* $\delta(A,B) = \delta(B,C) = \delta(C,D) = 3$ *et* $(AE) \perp (AB)$ *avec* $A \preceq E \preceq F \preceq G$ *et* $\delta(A,E) = \delta(E,F) = \delta(F,G) = \frac{1}{4}$ *. On considère les rectangles* $ADHG$ *,* $ACIF$ *,* $BDHJ$ *et* $CDKI$ *. Calculer* $\sigma(ACIF \cup BDHJ)$ *,* $\sigma(ACIF \cup CDKI)$ *,* $\sigma(\Delta AIC \cup \Delta KIJ)$ et $\sigma(\Delta FJG \cup \Delta IKH)$.

70 *Si* $(AB) \perp (AC)$*,* $\delta(A,B) = x$*,* $\delta(A,C) = y$*,* $\mathcal{S}_M(C) = B$ *et* $\mathcal{S}_M(A) = D$*, calculer* $\sigma(ABCD)$ *et* $\sigma(ABDC)$ *en fonction de* x *et de* y.

71 *Si* $ABCD$ *est un parallélogramme,* $p_\perp(C) = C' \in (AB)$ *,* $p_\perp(A) = A' \in (CD)$ *, démontrer que* $\Delta BCC'$ et $\Delta DAA'$ *sont isométriques. On pose* $\delta(A,C') = b$ *,* $\delta(C,C') = h$ *et* $\delta(A,B) = a$ *. Distinguer les cas de figure et calculer, en fonction de* a, b, h *,* $\sigma(AC'CA')$ *et* $\sigma(ABCD)$ *. En déduire une formule pour l'aire du parallélogramme.*

72 *Si* $(AB) \parallel (CD)$ *et* $ABCD$ *trapèze avec* $p_\perp(B) = B' \in (DC)$*,* $\delta(A,B) = a$*,* $\delta(C,D) = b$ *et* $\delta(B,B') = h$*, démontrer que* $\sigma(ABCD) = h \cdot \frac{a+b}{2}$.

73 *Montrer que l'égalité* $(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$ *permet de trouver des entiers vérifiant la relation de Pythagore.*

Application: si $(AB) \perp (AC)$ *et* $\delta(B,C) = a$ *,* $\delta(A,C) = b$ *,* $\delta(A,B) = c$ *, calculer* c *dans les cas* *suivants:*

- $a = 25+\alpha$, $b = 25-\alpha$ et $\alpha \in \{1, 4, 9, 16\}$
- $a = 36+\alpha$, $b = 36-\alpha$ et $\alpha \in \{1, 4, 9, 16, 25\}$
- $a = n^2+\alpha$, $b = n^2-\alpha$ et $n \in \mathbb{N}^*$, *comment choisir* α *si* $c \in \mathbb{N}^*$?

74 *On donne un segment* $[A,B]$ *de longueur* 1. *Construire un point* $C_2 \in (AB)$ *tel que* $\delta(A,C_2) = \sqrt{2}$, *puis un point* $C_3 \in (AB)$ *tel que* $\delta(A,C_3) = \sqrt{3}$. *Indiquer une construction pour* $C_n \in (AB)$ *tel que* $\delta(A,C_n) = \sqrt{n}$.

75 *Parmi les droites* (AB), (BC) *et* (CA), *deux sont orthogonales et* $\delta(A,B)$, $\delta(B,C)$, $\delta(C,A)$ *sont des entiers. Peut-on avoir:*

a) $\delta(A,B) = 4\cdot\delta(B,C)$

b) $5\cdot\delta(A,B) = 13\cdot\delta(B,C)$?

Indiquer des choix pour a *et* b *si* $a\cdot\delta(A,B) = b\cdot\delta(B,C)$.

76 *Quelle est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté* a ? *Quelle est son aire?*

77 *Existe-t-il un triangle rectangle isocèle dont les longueurs des côtés sont des entiers?*

78 *Que devient l'hypoténuse si l'on double la longueur d'un des cathètes, si l'on double la longueur des deux cathètes?*

79 *On donne* $\delta(A,B) = 5$, $\delta(B,C) = 12$, $\delta(C,A) = 9$. *A-t-on* $A \in (BC)$? *Avec* $p_\perp(A) = H \in (BC)$, $\delta(B,H) = x$, $\delta(A,H) = h$,

a) *écrire les relations de Pythagore pour* ΔBAH et ΔCAH *et calculer* x;

b) *calculer* h *et l'aire du triangle* ΔABC.

80 *Si* $\delta(A,B) = 3$, $\delta(B,C) = 4$ *et* $\delta(A,C) = 6$, *a-t-on* $A \in (BC)$? *On pose* $p_\perp(B) = D \in (AC)$ *et* $p_\perp(C) = E \in (AB)$. *Calculer* $\delta(B,E)$, $\delta(C,E)$, $\delta(A,D)$ *et* $\delta(D,B)$.

81 *Si* $(AB) \perp (BC)$, $p_\perp(B) = H \in (AC)$, $\delta(A,H) = 8$ *et* $\delta(H,C) = \frac{9}{2}$, *calculer* $\delta(A,B)$, $\delta(B,C)$ *et* $\delta(B,H)$.

82 *Si un cathète est de longueur* 5 *et la hauteur relative à l'hypoténuse de longueur* 4, *trouver la longueur de l'hypoténuse et celle du deuxième cathète.*

83 *Démontrer que dans un rectangle la somme des carrés des distances d'un point intérieur à deux sommets non consécutifs du rectangle est la somme des carrés des distances de ce point aux deux autres sommets. Cette relation est-elle encore vraie si le point est à l'extérieur du rectangle?*

84 *Si* $ABCD$ *est un rectangle et* $p_\perp(B) = E \in (AC)$, $p_\perp(E) = F \in (AB)$, $\delta(A,B) = 20$ *et* $\delta(B,C) = 15$, *calculer* $\delta(E,C)$, $\delta(E,A)$, $\delta(B,E)$, $\delta(A,F)$, $\delta(B,F)$, $\delta(E,F)$, $\delta(F,C)$, $\delta(F,D)$ *et* $\delta(E,D)$.

85 ***Théorème de Pythagore généralisé***

Dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée *ou augmentée, suivant que ce côté est opposé à un secteur aigu ou non, du double produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur lui.*

86 *Pour un triangle équilatéral, calculer en fonction du rayon du cercle circonscrit*

a) la longueur du côté,

*b) la longueur de l'apothème (l'**<u>apothème</u>** est le segment ayant pour extrémités le centre du cercle circonscrit et son projeté orthogonal sur un côté).*

87 *Pour un carré, calculer en fonction du rayon de cercle circonscrit*

a) la longueur du côté,

b) la longueur de l'apothème,

c) calculer la longueur du diamètre en fonction de celle du côté.

88 *Pour l'hexagone régulier, calculer en fonction du rayon du cercle cisconscrit*

a) la longueur du côté,

b) la longueur de l'apothème.